NOM:_____ COGNOM:_____

Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.

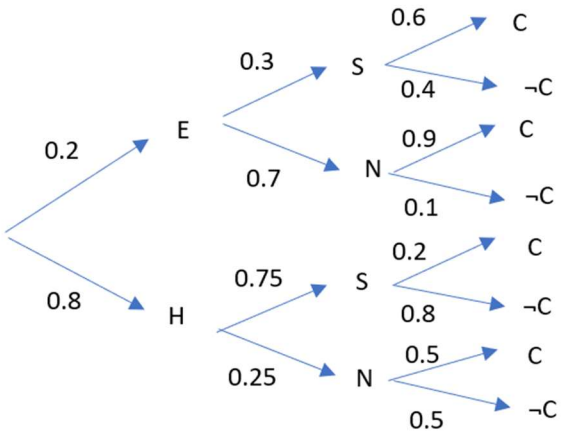
Problema 1 (Bloc A)

Un equip d'enginyeria ha d'escollir entre dos mètodes per processar senyals abans d'analitzar-los: el mètode exacte (E) i el mètode heurístic (H). S'observa que l'equip utilitza el mètode heurístic quatre vegades més que el mètode exacte. Les característiques del flux de dades (condició del senyal) depenen en part del mètode triat: quan es fa servir el mètode exacte, la font de dades és sorollosa (S) amb probabilitat 0,3 i neta (N) en els altres casos. I quan es fa servir el mètode heurístic, la font és sorollosa (S) amb probabilitat 0,75 i neta (N) altrament.

Finalment, la probabilitat que el sistema detecti correctament l'esdeveniment d'interès (C) segons la combinació mètode–condició és:

Mètode \ Condició	**Sorollosa (S)**	**Neta (N)**
Exacte (E)	0,60	0,90
Heurístic (H)	0,20	0,50

1. Representeu l'arbre complet d'esdeveniments de la situació esposada indicant les probabilitats en les respectives branques. (Tingueu en compte que l'arbre tindrà tres nivells i procureu emprar els noms dels esdeveniments com estan a l'enunciat). (1 pt)



2. a) Trobeu la probabilitat que la font de dades sigui sorollosa. (0,5 punts)
b) Sabent que la font de dades ha estat sorollosa, quina és la probabilitat que s'hagi emprat el mètode exacte? (0,5 punts)

$P(S) = P(S \mid E) \cdot P(E) + P(S \mid H) \cdot P(H) = 0,3 \cdot 0,2 + 0,75 \cdot 0,8 = 0,66$
$P(E|S) = (P(S \mid E) \cdot P(E)) / P(S) = (0,3 \cdot 0,2) / 0,66 = 0,0909$

3. Sabent que s'ha emprat el mètode heurístic, calculeu la probabilitat que el sistema detecti correctament l'esdeveniment d'interès. (1 punt)

$P(C|H) = P(C \cap H) / P(H) = [P(C \cap S \cap H) + P(C \cap N \cap H)] / P(H)$
$= [P(C \mid S \cap H) \cdot P(S \cap H) + P(C \mid N \cap H) \cdot P(B \cap H)] / P(H)$
$= [P(C \mid S \cap H) \cdot P(S \mid H) \cdot P(H) + P(C \mid N \cap H) \cdot P(B \mid H) \cdot P(H)] / P(H)$
$= P(C \mid S \cap H) \cdot P(S \mid H) + P(C \mid N \cap H) \cdot P(B \mid H) = 0,2 \cdot 0,75 + 0,5 \cdot 0,25 = 0,275$

4. Calculeu i expliqueu què volen dir P(E | C) i P(E | ¬C). (1 punt)

P(E | C): probabilitat d'haver emprat el mètode exacte si s'ha detectat correctament l'esdeveniment d'interès.
P(E | ¬C): probabilitat d'haver emprat el mètode exacte en cas que no s'hagi detectat correctament l'esdeveniment d'interès.

$P(E \mid C) = P(C \mid E) P(E) / P(C) = 0,81 \cdot 0,2 / 0,382 = 0,4241$
$P(E \mid \neg C) = P(\neg C \mid E) P(E) / P(\neg C) = 0,19 \cdot 0,2 / 0,618 = 0.0615$

$P(C) = P(C \cap S) + P(C \cap N) = P(C \cap S \cap E) + P(C \cap S \cap H) + P(C \cap N \cap E) + P(C \cap N \cap H) = P(C \mid S \cap E) \cdot P(S|E) \cdot P(E) + P(C \mid S \cap H) \cdot P(S|H) \cdot P(H) + P(C \mid N \cap E) \cdot P(N|E) \cdot P(E) + P(C \mid N \cap H) \cdot P(N|H) \cdot P(H) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,75 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,25 \cdot 0,8 = 0,382$

$P(C \mid E) = P(C \mid S \cap E) \cdot P(S \mid E) + P(C \mid N \cap E) \cdot P(B \mid E) = 0,6 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,7 = 0,81$

Un laboratori d'enginyeria del senyal processa mostres amb dos filtres digitals: un filtre A d'alta precisió (A) i un filtre B més ràpid però menys fiable (B). En el cas d'emprar el filtre A, la probabilitat que la mostra quedi neta (Ne) és 0,8. En canvi si s'usa el filtre B, la probabilitat que quedi neta és de 0,5. Per a la primera mostra, s'escull el primer filtre dues de cada cinc vegades. *Nota: no apliqueu en aquesta part coneixements de models de VA.*

5.- Sigui T la variable aleatòria que indica si la mostra és neta (T=1 si és neta, T=0 si no ho és). Calculeu E(T) i la seva desviació típica. (1 punt)

E(T) = P(T=1) = P(Ne) = P(Ne|A)P(A)+P(Ne|B)P(B) = 0.8·0.4+0.5·0.6=0.32+0.3 = 0.62
$E(T^2) = 0.62$
Var (T)= $0.62 - 0.62^2 = 0.2356$ i i $\sigma_T \approx 0.4853$

Es volen escollir dues mostres. La selecció del filtre per a la segona mostra depèn del filtre que s'hagi utilitzat en la primera. Si la primera mostra s'ha processat amb A, a la segona s'escull A amb probabilitat 0,7. Si la primera s'ha processat amb B, la segona s'escull A amb probabilitat 0,2. Les condicions de processament (neteja) són independents donat el filtre utilitzat (és a dir, un cop fixat el filtre, la "neteja" de cada mostra depèn només del filtre d'aquesta mostra). Es processen dues mostres consecutives i definim la variable aleatòria
Y='nombre de mostres netes (Ne) entre les dues processades'.

6. Considereu els esdeveniments **Ai**: "la mostra *i* s'ha processat amb A" i **Bi**: "la mostra *i* s'ha processat amb B" Calculeu les probabilitats conjuntes d'haver emprat les diferents combinacions de filtres. (1 punt)

P(A1, A2) = P(A1 ∩ A2) = P(A2|A1)· P(A1) = 0,7 ·0,4 = 0,28
P(A1, B2) = 0,3 · 0,4 = 0,12 ; P(B1, A2) = 0,2 · 0,6 = 0,12 i P(B1,B2) = 0,8 · 0,6 = 0,48

7. Trobeu la funció de probabilitat d'Y. (2 punts)

A l'apartat anterior s'han calculat les diferents opcions de filtres. Ara calculem la probabilitat de tenir 0, 1 o 2 mostres netes condicionada a les diferents opcions de filtres. [Donat el filtre de cada mostra, la seva "neteja" és independent de la de l'altra (però les eleccions de filtre ja són dependents entre elles)].

P(Y=2 | A1 ∩ A2) = 0,8 · 0,8 = 0,64; P(Y=1 | A1 ∩ A2) = 0,2·0,8 + 0,8·0,2 =0,32; P(Y=0 | A1 ∩ A2) = 0,2 · 0,2 = 0,04
P(Y=2 | A1 ∩ B2) = 0,8 · 0,5 = 0,4; P(Y=1 | A1 ∩ B2) = 0,5·0,8 + 0,2·0,5 =0,5; P(Y=0 | A1 ∩ B2) = 0,2 · 0,5 = 0,1
P(Y=2 | B1 ∩ A2) = 0,5 · 0,8 = 0,4; P(Y=1 | B1 ∩ A2) = 0,5·0,8 + 0,2·0,5 =0,5; P(Y=0 | B1 ∩ A2) = 0,5 · 0,2 = 0,1
P(Y=2 | B1 ∩ B2) = 0,5 · 0,5 = 0,25; P(Y=1 | B1 ∩ B2) = 0,5·0,5 + 0,5·0,5 =0,5; P(Y=0 | B1 ∩ B2) = 0,5 · 0,5 = 0,25

I finalment es calcula la funció de probabilitat d'Y:
P(Y=2) = P(Y=2 | A1 ∩ A2) · P(A1 ∩ A2) + P(Y=2 | A1 ∩ B2) · P(A1 ∩ B2) + P(Y=2 | B1 ∩ A2) · P(B1 ∩ A2) + P(Y=2 | B1 ∩ B2) · P(B1 ∩ B2) = 0,28·0,64+0,12·0,40+0,12·0,40+0,48·0,25 = 0,3952
Anàlogament, P(Y=1) = 0,4496 i P(Y=0) = 0,1552

8. En un sistema de processament de senyals en temps real, quan una mostra entra per al seu processament es mesura la latència total X (en segons) entre l'arribada de la mostra i la disponibilitat del resultat final. Aquest temps és continu i pot dependre de dos règims operatius del sistema: un règim òptim on les latències petites són possibles en l'interval [0,1] i un règim degradat en l'interval (1, 7/3]. La densitat de probabilitat per la latència X ve donada per:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{-3x+7}{4} & 1 < x \le \dfrac{7}{3} \\ 0 & altrament \end{cases}$$

a) Especifiqueu la funció de distribució de la variable X (1 punt)

$\int_0^x t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3}$, $0 \le x \le 1$

$\frac{1}{3} + \int_1^x \left(\frac{-3t+7}{4}\right) dt = \frac{1}{3} + \left[\frac{-3t^2/2+7t}{4}\right]_1^x = \frac{1}{3} + \frac{-3x^2+14x+3-14}{8} = \frac{-3x^2}{8} + \frac{7x}{4} - \frac{25}{24}$, $1 < x \le \frac{7}{3}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{x^3}{3} & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{-9x^2+42x-25}{24} & 1 < x \le \dfrac{7}{3} \\ 1 & \dfrac{7}{3} < x \end{cases}$$

b) Calculeu el percentil 90 (1 punt)

F(1) = 1/3 ≈ 0,33 , per tant, el percentil 90 serà un valor entre 1 i 7/3. Calculem amb l'expressió de la funció de distribució corresponent. Trobem x tal que: $\frac{-9x^2+42x-25}{24} = 0.9$, llavors $x_{90} = \frac{7}{3} - \frac{2}{\sqrt{15}} \approx 1,82$

NOM:_____ COGNOMS:_____

Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.

Problema 2 (B)

Els videojocs cada cop esdevenen més populars i darrera d'ells hi ha molta estadística en el seu desenvolupament. A continuació et plantegem algunes qüestions sobre el nou joc de la UPC: *League of Myths*.

1) **(1 punt)** En una zona de combat, la taxa d'aparició de monstres és de 1.5 per minut. Trobeu (a) La probabilitat que passin més de 3 minuts sense aparèixer cap monstre; (b) La probabilitat que apareguin exactament 4 monstres en 2 minuts.

T: "Minuts entre aparició de monstres" ~ $Exp(\lambda = 1.5)$
X: "Nombre de monstres per cada 2 minuts" ~ $P(\lambda = 1.5 \cdot 2 = 3)$

(a) $P(T > 3) = e^{-1.5 \cdot 3} = e^{-4.5} \approx \mathbf{0.011}$
(b) $P(X = 4) = \frac{3^4 e^{-3}}{4!} = \frac{81e^{-3}}{24} \approx \mathbf{0.168}$

2) **(1 punt)** Cada atac amb una daga té una probabilitat d'èxit igual a p=0.3. En un duel concret amb un cavaller es fan 12 atacs amb una daga. Calculeu (a) la probabilitat que el cavaller rebi almenys 3 atacs de daga; (b) El valor esperat i la desviació típica del nombre d'atacs en un duel com aquest.

X: "Número d'èxits" ~ $B(n = 12, p = 0.3)$

(a) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \left[\binom{12}{0} \cdot 0.7^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0.3 \cdot 0.7^{11} + \binom{12}{2} \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^{10}\right] = \mathbf{0.747}$
(b) $E[X] = n \cdot p = 12 \cdot 0.3 = 3.6; \quad V[X] = n \cdot p \cdot q = 12 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 2.52 \rightarrow \sigma = \sqrt{2.52} = \mathbf{1.58}$

3) **(1 punt)** Un ballester té una probabilitat d'encert en una diana igual a p=0.35 per tret. Trobeu (a) la probabilitat que el primer encert arribi abans de la 5a fletxa; (b) l'esperança del nombre de trets fins al primer encert en la diana.

X: "Nombre de trets fins al primer encert" ~ $Geom(p = 0.35)$

(a) $P(X \leq 4) = 1 - P(X > 4) = 1 - [q^4] = 1 - [(1 - 0.35)^4] = \mathbf{0.821}$
(b) $E[X] = \frac{1}{0.35} = \mathbf{2.86}$

4) **(1 punts)** Cada cofre del joc té un objecte llegendari amb probabilitat p=0.2. Calculeu (a) L'esperança del nombre de cofres que el jugador ha d'obrir fins aconseguir 3 objectes llegendaris; (b) La probabilitat d'haver obert 12 cofres buits per aconseguir el tercer objecte llegendari.

X: "Nombre de cofres oberts fins a tenir 3 objectes llegendaris" ~$BN(r = 3, p = 0.2)$

(a) $E[X] = \frac{3}{0.2} = \mathbf{15}$
(b) 12 cofres buits més 3 cofres amb un objecte llegendari són un total de 15 cofres:

$$P(X = 15) = \binom{14}{2} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^{12} = \mathbf{0.05}$$

5) (**2 punts**) El nombre d'anells màgics que troba un Elfo a Mordor per mes (30 dies) segueix una distribució de Poisson amb $\lambda = 4$. a) Si un elfo porta 15 dies sense trobar cap anell, calculeu el temps esperat en dies que ha de passar per a que trobi el següent anell; b) En una expedició de 4 elfos per les muntanyes de Mordor, trobeu la probabilitat que tots els elfos trobin almenys un anell màgic en un mes d'expedició.

a) T: "Temps, en mesos entre les troballes de 2 anells màgics" ~ $Exp(\lambda = 4)$
Per la propietat de no memòria, no influeix que ja hagin passat 15 dies. Per tant, $E(T) = \frac{1}{4} = 0.25\ mesos = \mathbf{7.5\ dies}$

b) X: "Nombre d'anells màgics que troba un elfo en un mes" ~$P(\lambda = 4)$
Y:"Nombre d'elfos que NO troben cap anell màgic en un mes" ~$B(n = 4, p)$
$p = P(X = 0) = e^{-4} = 0.018$
$P(\text{Tots troben almenys un anell}) = P(Y = 0) = (1 - 0.018)^4 = \mathbf{0.929}$

6) (**2 punts**) Una druida elabora pocions, el pes (en grams) de les quals segueix una distribució Normal amb mitjana desconeguda i desviació estàndard $\sigma = 0.5g$. Se sap que les pocions més pesades, les que estan per sobre de 5.8 g., són el 5% del total. (a) Calculeu la mitjana μ del pes de les pocions; b) quin és el interval de pesos de pocions més estret amb el qual podem garantir que un 95% de les pocions tindran el seu pes dins d'aquest interval?

a) $X: "Pes\ de\ les\ pocions" \sim N(\mu, \sigma = 0.5)$
$P(X > 5.8) = 0.05 \rightarrow P(X \leq 5.8) = 0.95 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{5.8 - \mu}{0.5}\right) = 0.95 \rightarrow \frac{5.8 - \mu}{0.5} = qnorm(0.95) = 1.645 \rightarrow \mu$
$= 5.8 - 1.645 \cdot 0.5 = \mathbf{4.9775g}$

b) $P(a < X < b) = 0.95 \rightarrow P\left(\frac{a-5}{0.5} < Z < \frac{b-5}{0.5}\right) = 0.95 \rightarrow \frac{b-5}{0.5} = qnorm(0.975) = 1.96 \rightarrow b = 4.9775 + 1.96 \cdot 0.5 = \mathbf{5.9575g}$.
Per simetria, l'extrem inferior de l'interval hauria de ser $a = \mathbf{3.9975g}$.

7) (**2 punts**) El nombre de pocions sense poders que produeix un druida diàriament (D) segueix una distribució desconeguda, però amb valor esperat igual a 4. També es sap que, 1 de cada 5 mesos (mesos de 30 dies), el nombre mitjà de pocions sense poders és superior a 5. (a) Aquesta afirmació és equivalent a dir que 1 de cada 5 mesos el druida produirà més de 150 pocions sense poders? (b) Podeu trobar la variància de la variable D? (c) És possible trobar la probabilitat que el druida produeixi més de 10 pocions sense poders en un dia? Raoneu les respostes.

(a) Sí, és equivalent. M és la suma de 30 variables D (diàries), i M/30 és la mitjana del mes. Llavors, M>150 és equivalent a mitjana > 5.
(b) P($\bar{D}$ > 5) = 1/5. Si apliquem el TCL, $\bar{D} \approx N\left(\mu = 4, \sigma/\sqrt{30}\right)$, on σ és la desviació tipus desconeguda de D, suposant que els dies són independents. Llavors, $P\left(Z \leq \frac{5-\mu}{\sigma/\sqrt{30}}\right) = 0.80$ i $\frac{5-\mu}{\sigma/\sqrt{30}} = 0.8416$ [$qnorm(0.80)$], d'on es treu que $\sigma = 6.51$, i la variància demanada **42.356**.
(c) No, no és possible trobar aquesta probabilitat, encara que hem trobat la desviació tipus de D no es coneix la seva distribució de probabilitat.

Valors per la distribució normal estandaritzada Z(0,1)

pnorm(0,25)=	0,5987	pnorm(1,75)=	0,9599		qnorm(0,55)=	0,126	qnorm(0,85)=	1,036
pnorm(0,5)=	0,6915	pnorm(2)=	0,9772		qnorm(0,6)=	0,253	qnorm(0,9)=	1,282
pnorm(0,75)=	0,7734	pnorm(2,25)=	0,9878		qnorm(0,65)=	0,385	qnorm(0,95)=	1,645
pnorm(1)=	0,8413	pnorm(2,5)=	0,9938		qnorm(0,7)=	0,524	qnorm(0,975)=	1,960
pnorm(1,25)=	0,8944	pnorm(2,75)=	0,9970		qnorm(0,75)=	0,674	qnorm(0,99)=	2,326
pnorm(1,5)=	0,9332	pnorm(3)=	0,9987		qnorm(0,8)=	0,842	qnorm(0,995)=	2,576